

## 11. Übung zur Elementaren Stochastik

Prof. Dr. Ehrhard Behrends, WS 2009/10

Ausgabe: 4. 1. 2010

Abgabe: am 12. 01. 2010 bis 16.00 Uhr in den Fächern der Tutoren

Bei einigen Aufgaben gibt es eine \*-Version. Die ist für die ambitionierteren Übungsteilnehmer gedacht. Das gilt auch für die \*\*-Aufgaben, bei denen wird unter den richtigen Lösungen auch ein Preis verlost. Bitte für jedes  $n$  auf dem gleichen Zettel höchstens eine der Aufgaben  $n$ ,  $n^*$ ,  $n^{**}$  bearbeiten,  $n = 1, 2, 3, 4$ .

**1.** Zwei Mathematikstudenten (A und B) lösen zwei Mathematikaufgaben im Team. Aufgabe 1 ist leicht: A (bzw. B) wird eine Zeit brauchen, die exponentialverteilt mit Erwartungswert 3 Minuten (bzw. 5 Minuten) ist. Die Aufgabe gilt als gelöst, wenn einer von beiden auf die richtige Idee gekommen ist.

Bei Aufgabe 2 ist es schwieriger, diesmal sind die Erwartungswerte der Knobeldauer 10 Minuten bzw. 20 Minuten. Auch diesmal gilt die Aufgabe als gelöst, wenn einer von beiden auf die richtige Idee gekommen ist.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden weniger als 15 Minuten zu tun haben. (Wir wollen annehmen, dass beide zunächst Aufgabe 1 bearbeiten und unmittelbar danach beide Aufgabe 2.)

**2.**  $X_1, X_2, \dots, X_n$  seien Zufallsvariable, die zum Parameter  $\lambda$  exponentialverteilt sind. Definiere  $p_n :=$  "Die Wahrscheinlichkeit, daß  $X_1 + \dots + X_n \leq 1$ ".

a) Finden Sie eine Formel für die  $p_n - p_{n-1}$ ; sie wird etwas mit der Poissonverteilung zu tun haben, und man kommt darauf, wenn man auf die Berechnung von  $p_n - p_{n-1}$  Satz 8.2(ii) und partielle Integration anwendet.

b) Schreiben Sie mit Hilfe dieses Ergebnisses die Skizze eines Programms, durch das die Simulation der Poissonverteilung auf die Simulation der Exponentialverteilung zurückgeführt wird (s. Skript Seite 21). (Begründen Sie, warum das Programm tatsächlich poissonverteilte Zufallszahlen ausgibt.)

**3.**  $\mathbb{R}$  sei mit der  $N(4, 2)$ -Verteilung versehen. Bestimmen Sie den Erwartungswert der durch  $x \mapsto 2x^2 - x + 5$  definierten Zufallsvariablen  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(Tipp: Entwickeln Sie  $X$  nach Potenzen von  $x - 4$  und führen Sie eine Variablentransformation durch.)

**4.** Geben Sie Zufallsvariable  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  so an, dass gilt:  $X$  ist  $N(0, 1)$ -verteilt,  $X, Y$  sind unkorreliert (vgl. 8. Übung) aber nicht unabhängig.

**4\*.** Wie „3.“, aber zusätzlich soll auch  $Y$   $N(0, 1)$ -verteilt sein.

(Kurz: Auch bei Normalverteilungen folgt aus der Unkorreliertheit nicht die Unabhängigkeit.)

Homepage der Veranstaltung: [page.mi.fu-berlin.de/behrends/stochastik2009](http://page.mi.fu-berlin.de/behrends/stochastik2009)

**Für den mathematischen „Arbeitsspeicher“ ...**

Auf die folgenden Fragen sollte man jederzeit eine richtige Antwort geben können. **Zur Not mit Hilfe eines vorbereiteten Zettels (der übrigens später bei der Klausur auch verwendet werden darf).**

### Arbeitsspeicher-Archiv: Nächste Seite

Was versteht man unter der „diskreten Faltung“ zweier Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $\mathbb{N}_0$ , und in welchem Zusammenhang ist sie wichtig? Was ist die Faltung zweier Funktionen auf  $\mathbb{R}^+$ , und was lernt man aus der Faltung zweier Wahrscheinlichkeitsdichten auf  $\mathbb{R}^+$ ? Was versteht man unter der Binomialverteilung? Unter welchen Bedingungen kann man die hypergeometrische Verteilung dadurch approximieren? Und wann die Poissonverteilung? Was besagt der Satz von deMoivre-Laplace? **Neu:** Was wird mit der Stirlingformel approximiert? Was ist eine gedächtnislose Wartezeit? Wie kann man die gedächtnislosen Wartezeiten beschreiben? Was weiß man über Summen, Maxima und Minima gedächtnisloser Wartezeiten?

*... und hier noch Beispiele aus den „Arbeitsspeichern“ anderer Teilbereiche der Mathematik:*

Ist  $\mathcal{E}$  ein Mengensystem, d.h. eine Teilmenge der Potenzmenge einer Menge  $M$ , wie ist dann  $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$  definiert? Und wie  $\bigcap_{E \in \mathcal{E}} E$ ? Was ist eine offene, was eine abgeschlossene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ ? Was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung? Was ist eine stetige Funktion? Was versteht man unter dem Zwischenwertsatz? Was ist  $f^{-1}(A)$ , wie ist die inverse Abbildung  $f^{-1}$  definiert (falls sie existiert)? Was heißt Konvergenz für Folgen und Reihen. Was ist eine absolut konvergente Reihe? Warum ist dieser Begriff für die Stochastik wichtig? Was ist eine Folge in einer Menge  $M$ ? Unter welchen Bedingungen weiß man, dass der Grenzwert einer Folge von stetigen (bzw. differenzierbaren) Funktionen wieder stetig (bzw. differenzierbar) ist? **Neu:**

### Stochastik am Computer: Anregungen

Viele Definitionen, Ergebnisse und Verfahren sind besser zu verstehen, wenn man zur Illustration Computer-Simulationen zur Verfügung hat. Es wird empfohlen, sich solche Simulationen selbst zu schreiben, viele Routinen findet man schon vorgefertigt in den meisten Programmpaketen.

*Unterprogramme:* Zufallszahlen erzeugen können (Laplace, Bernoulli, Poisson, geometrisch, Exponentialverteilung, Normalverteilung, ...); Häufigkeitsverteilungen skizzieren können (so genannte Histogramme). Monte-Carlo-Verfahren zur approximativen Integration. **Neu:**

*Projekte:* Test des Zufallszahlengenerators (etwa einige Millionen gleichverteilte Zufallszahlen in  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  erzeugen und prüfen, ob alle Ergebnisse in etwa gleich oft vorkommen); einige Millionen Poissonverteilte Zufallszahlen erzeugen und ein Histogramm erstellen, ... Integrale ausrechnen mit Monte-Carlo-Verfahren und Güte-Test durch Vergleich mit dem exakten Ergebnis; Testläufe zum Übereinstimmungsparadoxon;  $p$  gleichverteilt in  $[0, 1]$  wählen, dann für verschiedene  $k$  testen, wie groß die (experimentelle) bedingte Wahrscheinlichkeit für  $k + 1$  Erfolge bei  $k$  Erfolgen ist. Testen Sie experimentell die Güte der Approximation beim Wallisprodukt und bei der Stirlingformel. **Neu:** Testen Sie experimentell den Satz von deMoivre-Laplace.

## Arbeitsspeicher-Archiv

Was ist eine  $\sigma$ -Algebra? Wie ist die  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen definiert? Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum? Wie kann man einen Wahrscheinlichkeitsraum einfach definieren, wenn  $\Omega$  höchstens abzählbar ist? Was versteht man unter a) der Gleichverteilung auf  $\{1, \dots, n\}$ , b) einem Laplaceraum, c) der Bernoulliverteilung, e) der Poissonverteilung, f) der geometrischen Verteilung? Wie kann man auf einem Intervall, versehen mit der  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen, einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Hilfe einer Dichtefunktion definieren? Was versteht man unter a) Gleichverteilung, b) Exponentialverteilung, c) Normalverteilung? Was wird mit dem Buffonschen Nadelexperiment approximativ berechnet? Was ist eine Zufallsvariable? Wie ist der durch eine Zufallsvariable induzierte Wahrscheinlichkeitsraum definiert? Wie ist der Erwartungswert einer Zufallsvariablen im Fall diskreter Räume und bei Räumen mit Dichte definiert? Was sind Varianz und Streuung? Wie viele Möglichkeiten gibt es,  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge auszuwählen? In welchen Fällen verwendet man die hypergeometrische Verteilung? Was ist eine maximum-likelihood-Schätzung? Was ist das Übereinstimmungs-Paradoxon? Was versteht man unter „bedingter Wahrscheinlichkeit“? Wann heißen zwei Ereignisse unabhängig? Was bedeutet es, dass  $n$  Ereignisse unabhängig sind? Wann sind zwei (oder allgemeiner:  $n$ ) Zufallsvariable unabhängig? Was weiß man über den Erwartungswert des Produkts zweier *unabhängiger* Zufallsvariablen, was über die Varianz der Summe? Was ist das „Wurzel- $n$ -Gesetz“?